Movimiento Browniano

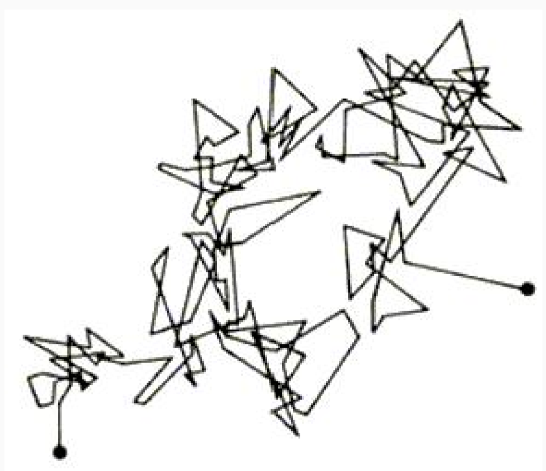
Grupo Estudiantil de Matemática (gem@uni.edu.pe)

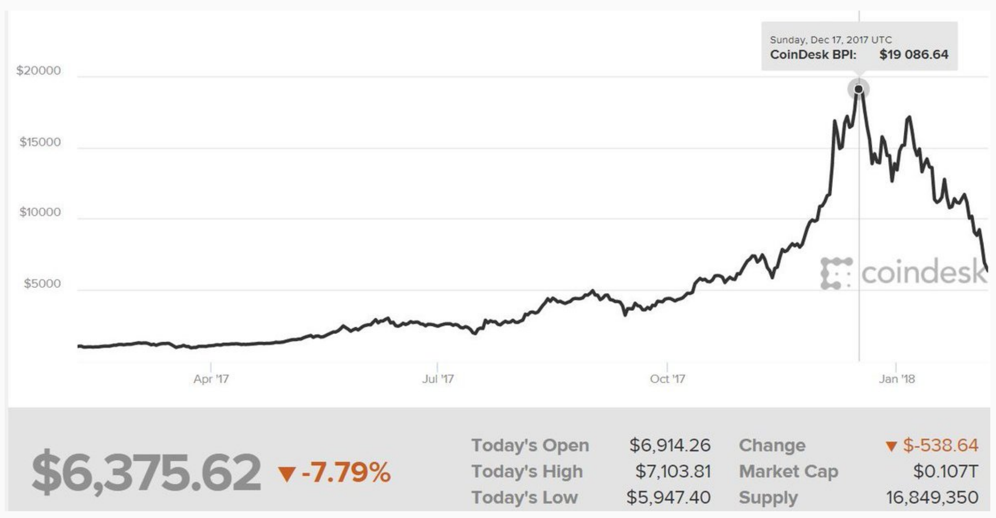
Resumen

El movimiento browniano es un movimiento aleatorio continuo que ha permitido modelar muchos fenómenos que ocurren en la naturaleza. En la presente vamos a estudiar el movimiento browniano partiendo de un paseo aleatorio y llevándolo al límite en probabilidad para luego aplicarlo en un paper sobre contaminación ambiental.

Introducción

En 1827, el biólogo y botánico escocés Robert Brown vio como una partícula de polen *Clarkia pulchella* se movía sin orden o patrón alguno en el agua, de manera aleatoria. Sin embargo, ese fenómeno recién sería comprendido años después, cuando los científicos Thorvald y Einstein describieron matemáticamente este fenómeno (en 1880 y 1900 respectivamente). Con el paso del tiempo, se obtuvieron más resultados y se hallaron múltiples aplicaciones en diferentes áreas académicas como finanzas, física, biología, etc; modelando diversos fenómenos.





Paseos aleatorios

Imaginemos que tengo un moneda normal y la lanzo muchas veces, si obtengo cara gano un sol, si obtengo sello, pierdo un sol. Así muchas veces, ¿qué se obtiene?

Formulación matemática

La variable aleatoria X_1 va a describir el movimiento hacia algún punto (en $\mathbb{Z}$ sería $+1$ o -1),

$$X_1 : \omega \mapsto +1 \text{ ó } -1$$

describe esto. Los siguientes pasos serán X_2, X_3 y así en adelante. Denotaremos S_n la posición del paseo en el tiempo n, podemos escribir:

$$S_n = x + X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

donde x es el punto de inicio del paseo aleatorio.

Los $\{X_k\}_{k\geq 0}$ son independientes e identicamente distribuidas (i.i.d.) con distribución

$$\mathbb{P}\{X_k = +1\} = \mathbb{P}\{X_k = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Límite de los paseos aleatorios

Ahora nos podemos hacer la siguiente pregunta, ¿qué ocurre si doy más pasos en menos tiempo? Es decir, vamos a estudiar el comportamiento global de la función $\phi : k \mapsto S_k$ que se define en $\mathbb{Z}$. Para $n \in \mathbb{Z}_+$ y para todo real $t \geq 0$ definimos

$$S_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}$$

donde $[x]$ denota la parte entera del número real x.

Proposición: Para toda elección del entero $p \geq 1$ y números reales $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p$, se obtiene:

$$(S_{t_1}^{(n)}, S_{t_2}^{(n)}, \ldots, S_{t_p}^{(n)}) \xrightarrow{(ley)} (U_1, U_2, \ldots, U_p).$$

Cuando $n \to \infty$, la ley límite es caracterizada como sigue:

- Las v.a.'s U_1, $U_2 - U_1, \ldots, U_p - U_{p-1}$ son independientes;
- para todo $j \in \{1, \ldots, p\}$, $U_j - U_{j-1}$ es una v.a. con distribución normal de media cero y varianza $t_j - t_{j-1}$.

Definición del movimiento browniano

Llamamos movimiento browniano a la familia $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de v.a.'s con valores en $\mathbb{R}$ definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tales que:

- *Independencia de incrementos* $B(t) - B(s)$, para $t > s$, es independiente del pasado, esto es, de B_u, $0 \leq u \leq s$.
- *(Incrementos normales)* $B(t) - B(s)$ tiene distribución normal con media 0 y varianza $t - s$.
- *(Continuidad de caminos)* $B(t)$, $t \geq 0$ son funciones continuas de t.

Contaminación ambiental

El movimiento browniano también ha sido una herramienta útil en algunos trabajos contra la contaminación ambiental. En el artículo *'Texture characterization of atmospheric fine particles by fractional Brownian motion analysis'* investigadores asiáticos utilizan el movimiento browniano para crear una nueva caracterización de las partículas de la capa atmosférica, para así reconocer y estudiar a las partículas más toxicas.

Referencias

- Fima C Klevaner, *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*, Imperial College Press, 2012.
- Gregory F. Lawler, *Random Walk and the Heat Equation*, American Matehmatical Society, 2010.
- Chin-Hsiang Lou, Che-Yen Wen, Jiun-Jian Liaw, Shih-Hsuan Chiu, Whei-May Grace Lee, *Texture characterization of atmospheric fine particles by fractional Brownian motion analysis*. En *ELSEVIER*. Atmospheric Environment 38:935-940. 2004.

EXPOCIENCIA
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Ingeniería
http://stem.uni.edu.pe/expociencia